第二章　度量空间

在点集拓扑学早期对实直线和欧几里得空间子集的研究中发现一些具体的空间性质可以进一步抽象，这导致法国数学家 M. Fréchet(1878-1973)[1906]在博士论文中引入了度量空间的概念．度量空间类包含了数学许多分支的研究对象，尤其是可分度量空间所具有的良好性质为众多工作的出发点．本章从点集拓扑学的角度介绍度量空间的一些基本性质，同时也为第三章讨论度量空间的映象和第四至六章研究函数空间的拓扑做准备，主要由三部分内容组成，一是度量空间的紧性、可分性、仿紧性和完全性，二是度量化定理，三是度量空间的映射性质．

§2.1　度量空间

度量空间是以公理形式定义的．从实直线中点的距离概念可以抽象出距离函数(distance function)和度量公理.

定义 2.1.1　对于非空集合 X，设函数 $d: X\times X\to[0,+\infty)$满足：对于任意的 $x, y, z\in X$,

(1) d(x, y)=0 当且仅当 x=y(正定性);

(2) d(x, y)=d(y, x)(对称性);

(3) $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)$(三角不等式).

则称函数 d 是集合 X 上的度量(metric)或距离(distance)，集合 X 赋予度量 d 称为度量空间(metric space)，记为(X, d)．d(x, y)称为点 x 与 y 之间的距离．上述条件(1)~(3)称为度量公理(metric axiom).

在不引起混淆或不必特别指出具体的度量时，度量空间(X, d)常称为度量空间 X.

例 2.1.2　n 维欧几里得空间$\mathbb{R}^n$.

对于实数集合$\mathbb{R}$中的任意两点 x 和 y，定义 d(x, y)=|x-y|，则 d 满足度量公理，所以(R, d)是度量空间，简称$\mathbb{R}$为实数空间.

一般地说，对于实数集合$\mathbb{R}$的 n 次笛卡儿积$\mathbb{R}^n$中的任意点 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$，定义 $d(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$，则 d 满足度量公理，称 d 为$\mathbb{R}^n$上的欧几里得度量(Euclidean metric)，($\mathbb{R}^n$, d)称为 n 维欧几里得度量空间，或简称

欧几里得空间(Euclidean space). ▉

在一个集合上一般可以定义很多的度量. 如在实数集合$\mathbb{R}$上, 若对于$\mathbb{R}$中的任意两点 x 和 y, 当 x=y 时定义 d'(x, y)=0, 当 $x\neq y$ 时定义 d'(x, y)=1, 则($\mathbb{R}$, d')也是度量空间.

例 2.1.3 Hilbert[27]空间 **H**.

$\mathbb{R}^{\omega}$ 表示实数集合$\mathbb{R}$的可数次笛卡儿积. 记 **H** 为平方收敛的所有实数序列构成的集合, 即 $\mathbf{H}=\{x=(x_1, x_2,\dots)\in\mathbb{R}^{\omega} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2<\infty\}$. 定义 d: $\mathbf{H}\times\mathbf{H}\to[0, +\infty]$如下: 对于任意的 $x=(x_1, x_2,\dots)$, $y=(y_1, y_2,\dots)\in\mathbf{H}$, 令 $d(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$. 利用 Cauchy[28]不等式 $(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i)^2\leq\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2$, 可以证明 d 是 **H** 上的度量. 度量空间(**H**, d)称为 Hilbert 空间. ▉

本节介绍度量拓扑、可度量化空间、Baire 零维空间的概念, 同时说明度量空间的一些基本运算性质, 如有界度量、拓扑和、可数积空间等. 下面叙述度量空间与拓扑空间的关系.

设(X, d)是一度量空间, 对于每一$x\in X$, $\varepsilon>0$, 称 X 的子集 $B_d(x, \varepsilon)=\{y\in X : d(x, y)<\varepsilon\}$ 是以点 x 为心, ε为半径的球形邻域(ball neighborhood), 简称为 x 的ε球形邻域. 在不引起混淆时, 简记 $B_d(x, \varepsilon)$为 $B(x, \varepsilon)$. 在实数空间$\mathbb{R}$中, 对于 $x\in\mathbb{R}$, x 的ε球形邻域是开区间 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

引理 2.1.4 度量空间(X, d)的全体球形邻域的族形成 X 上一拓扑的基.

证明 令 $\mathscr{B}=\{B(x, \varepsilon) : x\in X, \varepsilon>0\}$. 为证明$\mathscr{B}$是集合 X 上一拓扑的基, 只须证明$\mathscr{B}$满足:

(B1) 若 $U, V\in\mathscr{B}$ 且 $x\in U\cap V$, 则存在 $W\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in W\subset U\cap V$;

(B2) $\bigcup\mathscr{B}=X$.

(B2)成立是显然的. (B1)成立证明如下. 设 $z\in B(x, s)\cap B(y, t)$, 取 $r=\min\{s-d(x, z), t-d(y, z)\}$, 则 r>0 且 $z\in B(z, r)\subset B(x, s)\cap B(y, t)$. 事实上, 对于任一 $a\in B(z, r)$, 由三角不等式, $d(a, x)\leq d(a, z)+d(z, x)<r+d(x, z)\leq s$, 所以 $B(z, r)\subset B(x, s)$. 同理可证 $B(z, r)\subset B(y, t)$. ▉

对于度量空间(X, d), 由引理 2.1.4, X 的球形邻域全体作为 X 上一拓扑的基, 生成 X 上的

---

[27] 德国数学家 D. Hilbert(1862-1943), 他是德国数学家 F. Lindemann(1852-1939)的学生.
[28] 法国数学家 A. L. Cauchy(1789-1857).

唯一拓扑，称为由度量 d 导出的度量空间(X, d)上的度量拓扑(metric topology). 度量空间是一类特殊的拓扑空间. 若无特别说明，度量空间上的拓扑均指度量拓扑.

定义 2.1.5 拓扑空间 X 称为可度量化空间(metrizable space)，若 X 上存在度量 d 使得由 d 导出的度量拓扑就是 X 上的拓扑.

对于任一非空集合 X，X 赋予离散拓扑，即 X 的每一子集是 X 的开集. 另一方面，在集合 X 上定义函数 $d: X\times X\to[0, +\infty)$使得对于 X 中的任意两点 x 和 y，当 x=y 时让 d(x, y)=0，当 $x\neq y$ 时让 d(x, y)=1，则(X, d)是度量空间，称 d 是 X 上的离散度量(discrete metric). 由离散度量导出的 X 上的度量拓扑就是离散拓扑，所以离散空间是可度量化空间，有时也称其为离散度量空间.

定义 2.1.6 设 A 是度量空间(X, d)的非空子集，称 $d(A)=\sup\{d(x, y) : x, y\in A\}$为集 A 的直径(diameter)，当上确界不存在时，称 A 的直径为无限大，记为 $d(A)=\infty$. 规定 $d(\varnothing)=0$.

定理 2.1.7 设(X, d)是度量空间，置 d'(x, y)=min{1, d(x, y)}，则(X, d')也是度量空间，且 d, d' 导出 X 上相同的度量拓扑.

证明 为证明 $d': X\times X\to[0, +\infty)$满足度量公理，只须证明 d' 满足三角不等式. 若不然，则存在 $x, y, z\in X$ 使得 d'(x, y)>d'(x, z)+d'(z, y)，于是 d'(x, z)<1 且 d'(z, y)<1，从而 $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)=d'(x, z)+d'(z, y)<d'(x, y)$，矛盾. 所以 d' 也是 X 上的度量.

对于任意的 $x\in X$ 及 $0<\varepsilon<1$，有 $B_d(x, \varepsilon)=B_{d'}(x, \varepsilon)$，故 d 与 d' 导出 X 上相同的度量拓扑. ∎

定理 2.1.8 设$\{(X_\alpha, d_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$是互不相交的度量空间族，则拓扑和$\oplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$是可度量化空间.

证明 记 $X=\oplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$. 由定理 2.1.7，不妨设对于任意的$\alpha\in\Lambda$有 $d_\alpha(X_\alpha)\le 1$. 定义 $d: X\times X\to[0, +\infty)$如下：$d(x, y)=\begin{cases} d_\alpha(x, y), & \text{存在}\alpha\in\Lambda\text{使得}x, y\in X_\alpha \\ 1, & \text{其它情形}\end{cases}$. 显然，d 满足度量公理中的正定性和对称性，下面证明 d 满足三角不等式. 若不然，则存在 $x, y, z\in X$ 使得 d(x, y)>d(x, z)+d(z, y)，于是 d(x, z)<1 且 d(z, y)<1，从而存在$\alpha\in\Lambda$使得 $x, y, z\in X_\alpha$，因此 $d(x, y)=d_\alpha(x, y)\le d_\alpha(x, z)+d_\alpha(z, y)=d(x, z)+d(z, y)<d(x, y)$，矛盾. 故(X, d)是度量空间. 对于任意的 $x\in X$ 及 $0<\varepsilon<1$，存在唯一的$\alpha\in\Lambda$使得 $x\in X_\alpha$，于是 $B_d(x, \varepsilon)=B_{d_\alpha}(x, \varepsilon)$. 由拓扑

和的定义易知，由 d 导出的 X 上的度量拓扑恰好是由 d_α 导出的 X_α 上的度量拓扑的拓扑和. 故 X 是可度量化空间. ▮

定理 2.1.9 设$\{(X_n, d_n)\}$是度量空间列且每一 $d_n(X_n)\le 1$. 对于笛卡儿积 $X=\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 中的任意两点 $x=(x_n)$和 $y=(y_n)$，定义 $d(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x_n, y_n)$，则 d 是 X 上的度量且由 d 导出的 X 上的度量拓扑就是由 d_n 导出的 X_n 上的度量拓扑的积拓扑.

证明 容易验证 d 满足度量公理，于是(X, d)是度量空间. 下证由 d 导出的 X 上的度量拓扑 τ_d就是由 d_n 导出的 X_n 上的度量拓扑的积拓扑τ.

先证明$\tau_d\subset\tau$. 由引理 2.1.4，只须证明对于每一 $x=(x_n)\in X$，$\varepsilon>0$，存在 $U\in\tau$ 使得 $x\in U\subset B(x, \varepsilon)$. 由于$\varepsilon>0$，存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $1/2^m<\varepsilon$. 令 $U=\{y=(y_n)\in X$ ：当 $n\le m+1$ 时有 $d_n(x_n, y_n)<1/2^{m+1}\}$，则 $x\in U\in\tau$ 且 $U\subset B(x, \varepsilon)$. 事实上，由于 $U=\bigcap_{n\le m+1} p_n^{-1}(B_{d_n}(x_n, 1/2^{m+1}))$，于是 $U\in\tau$. 若 $y=(y_n)\in U$，那么 $d(x, y)<\frac{1}{2^{m+1}}\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{2^n}+\sum_{m+2}^{\infty}\frac{1}{2^n}<1/2^{m+1}+1/2^{m+1}=1/2^m<\varepsilon$，所以$U\subset B(x, \varepsilon)$.

其次，证明$\tau\subset\tau_d$. 设 U 是积拓扑τ的基本子基的元，存在$m\in\mathbb{N}$和度量空间(X_m, d_m)的开集 W 使得 $U=p_m^{-1}(W)=\{z=(z_n)\in X$ ：$z_m\in W\}$，于是对于每一 $x=(x_n)\in U$，那么 $x_m\in W$，存在 X_m 中的球形邻域 $B_{d_m}(x_m, r)\subset W$. 由 d 的定义，对于每一 $y=(y_n)\in X$，有 $d(x, y)\ge d_m(x_m, y_m)/2^m$，从而，若 $d(x, y)<r/2^m$，则 $d_m(x_m, y_m)<r$，于是 $y_m\in W$，因而 $y\in U$，所以 $B_d(x, r/2^m)\subset U$，因此 $U\in\tau_d$. 以上是对τ的子基中的元证明的，从而知$\tau\subset\tau_d$.

综上所述，由 d 导出的 X 上的度量拓扑τ_d恰是由 d_n 导出的 X_n 上的度量拓扑的积拓扑τ. ▮

为了介绍 Baire 零维空间，同时也为了研究度量空间映射的需要，本节最后介绍一些零维空间的知识. 作为欧几里得空间维数概念的推广，拓扑空间的维数有小归纳维数(small inductive dimension)，大归纳维数(large inductive dimension)和覆盖维数(covering dimension). 对于拓扑空间 X，这三种维数分别记为 indX，IndX 和 dimX. 对于可分度量空间 X， indX=IndX=dimX(Hurewicz[29] 定理 [1927]). 对于度量空间 X, IndX=dimX(Katětov[30] [1952]-Morita[31] [1955] 定理). 特别地, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\mathrm{ind}\mathbb{R}^n=\mathrm{Ind}\mathbb{R}^n=\dim\mathbb{R}^n=n$.

空间 X 的子集 F 称为函数闭的(或零集, functionally closed), 如果存在连续函数 $f:X\to\mathbb{I}$ 使得 $F=f^{-1}(0)$. 空间 X 的函数闭集的余集称为 X 的函数开集(或余零集, functionally open set). 对于非空的 T_1 空间 X, 如果 X 具有由开闭集组成的基, 称 X 是零维(zero-dimensional)空间, 记为 indX=0; 对于非空的 T_1 空间 X, 如果对于 X 的每一闭集 A 及包含 A 的开集 V 存在 X 的开闭集 U 使得 $A\subset U\subset V$, 称 X 是强零维(strongly zero-dimensional)空间, 记为 IndX=0. 对于非空的完全正则空间 X, 如果 X 的每一函数开的有限覆盖 $\{U_i\}_{i\le k}$ 存在互不相交的有限开加细, 记为 dimX=0.

indX=0 是关于非空子集遗传的. 对于正规空间 X, IndX=0 或 dimX=0 都是关于非空闭子集遗传的. 若 IndX=0, 则 indX=0.

定理 2.1.10 对于非空的正规 T_1 空间 X 下述条件相互等价:

(1) IndX=0;

(2) dimX=0;

(3) X 的每一局部有限的开覆盖有互不相交的开加细.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 IndX=0 且 $\{U_i\}_{i\le k}$ 是 X 的函数开的有限覆盖, 将证明存在 X 的互不相交的精确开加细 $\{V_i\}_{i\le k}$, 对 k 做归纳法. k=1 时显然命题成立. 设对于每一 k<m>1 时命题成立, 考虑 X 的(函数)开的有限覆盖 $\{U_i\}_{i\le m}$. 由归纳假设, 存在 X 的互不相交的开加细 $\{W_i\}_{i\le m-1}$ 使得当 i<m-1 时有 $W_i\subset U_i$, 且 $W_{m-1}\subset U_{m-1}\bigcup U_m$. 对于 X 的不相交闭集 $W_{m-1}\setminus U_{m-1}$ 和 $W_{m-1}\setminus U_m$, 存在 X 的开闭集 U 使得 $W_{m-1}\setminus U_{m-1}\subset U\subset X\setminus(W_{m-1}\setminus U_m)=(X\setminus W_{m-1})\bigcup U_m$. 定义 $\{V_i\}_{i\le m}$ 如下: 当 i<m-1 时 $V_i=W_i$, $V_{m-1}=W_{m-1}\setminus U$ 且 $V_m=W_{m-1}\bigcap U$.

---

29 波兰数学家 W. Hurewicz(1904-1956), 他是波兰数学家 H. Hahn(1879-1934)的学生.

30 捷克数学家 M. Katětov(1918-1995).

31 日本数学家 K. Morita(森田纪一, 1915-1995), 他是日本一般拓扑学的奠基人之一.

则$\{V_i\}_{i\le m}$是$\{U_i\}_{i\le m}$的互不相交的精确开加细. 故 dimX=0.

(2)$\Rightarrow$(1). 设 dimX=0. 对于 X 的每一闭集 A 及包含 A 的开集 V, 存在连续函数 $f:X\to\mathbb{I}$ 使得 $f(A)\subset\{0\}$且 $f(X\setminus V)\subset\{1\}$. 则 X 的函数开覆盖$\{f^{-1}((0,1)), f^{-1}([0,1])\}$有互不相交的有限开加细 $\mathscr{W}$. 令 $U=\bigcup\{W\in\mathscr{W}: A\cap W\neq\varnothing\}$, 则 U 是 X 的开闭集且 $A\subset U\subset V$. 故 IndX=0.

(3)$\Rightarrow$(2)是显然的, 下面证明(2)$\Rightarrow$(3). 设 dimX=0, $\mathscr{U}=\{U_s\}_{s\in S}$是空间 X 的局部有限的开覆盖. 记 $\mathscr{T}$ 是子标集 S 的所有非空有限子集的族. 对于每一 $T\in\mathscr{T}$, 置 $F_T=(\bigcap_{s\in T}\overline{U}_s)\cap(\bigcap_{s\notin T}(X\setminus U_s))$, 则 F_T是 X 的闭集, 并且如果 F_T非空, 那么 $\dim F_T=0$. 令 $\mathscr{F}=\{F_T\}_{T\in\mathscr{T}}$, 则 $\mathscr{F}$ 是 X 的局部有限的闭覆盖且 $\mathscr{F}$ 中每一元仅与 $\mathscr{U}$ 中有限个元相交.

重新排列 $\mathscr{F}$ 为$\{F_\alpha\}_{\alpha\le\lambda}$, 其中 $F_0=\varnothing$. 应用超限归纳法定义 X 的开覆盖序列$\{\mathscr{U}_\alpha\}_{\alpha\le\lambda}$满足: 记每一 $\mathscr{U}_\alpha=\{U_{\alpha,s}\}_{s\in S}$

(10.1) 如果 $\beta<\alpha$, 则 $U_{\alpha,s}\subset U_{\beta,s}$, 且 $U_{0,s}\subset U_s$;

(10.2) 集族$\{U_{\alpha,s}\cap F_\alpha\}_{s\in S}$是互不相交的;

(10.3) 如果 $\beta<\alpha$, 则 $U_{\beta,s}\setminus U_{\alpha,s}\subset\bigcup_{\beta\le\gamma\le\alpha}F_\gamma$.

对于每一 $s\in S$, 令 $U_{0,s}=U_s$, 则条件(10.1)－(10.3)对 $\alpha=0$ 成立. 假设对于 $\alpha<\alpha_0\ge 1$ 已定义了覆盖 $\mathscr{U}_\alpha$ 满足(10.1)－(10.3). 对于每一 $s\in S$, 令 $U'_{\alpha_0,s}=\bigcap_{\alpha<\alpha_0}U_{\alpha,s}$. 则 $\mathscr{U}'_{\alpha_0}=\{U'_{\alpha_0,s}\}_{s\in S}$ 是 X 的开覆盖. 事实上, 如果 $\alpha_0=\alpha_1+1$, 则 $U'_{\alpha_0,s}=U_{\alpha_1,s}$, 所以结论成立. 不妨设 α_0 是极限序数. 对于每一 $x\in X$, 存在 x 在 X 中的邻域 U 仅与 $\mathscr{F}$ 中有限个元相交, 于是存在 $\beta<\alpha_0$ 使得对于每一满足 $\beta\le\gamma<\alpha_0$ 的 γ 有 $U\cap F_\gamma=\varnothing$. 因为 $\mathscr{U}_\beta$ 是 X 的覆盖, 存在 $s\in S$ 使得 $x\in U_{\beta,s}$. 由(10.3), 当 $\beta\le\alpha<\alpha_0$ 时有 $U\cap U_{\beta,s}\subset U_{\alpha,s}$, 于是 $x\in U\cap U_{\beta,s}\subset U'_{\alpha_0,s}$. 故 $\mathscr{U}'_{\alpha_0}$ 是 X 的开覆盖.

由(2)$\Leftrightarrow$(1), X 的闭子空间 F_{α_0} 的开覆盖$\{F_{\alpha_0}\cap U'_{\alpha_0,s}\}_{s\in S}$有互不相交的精确开加细$\{V_s\}_{s\in S}$. 令 $U_{\alpha_0,s}=(U'_{\alpha_0,s}\setminus F_{\alpha_0})\cup V_s$, 则 $\mathscr{U}_{\alpha_0}=\{U_{\alpha_0,s}\}_{s\in S}$ 是 X 的开覆盖且满足(10.1)－(10.3).

由(10.2)和(10.1), $\mathscr{U}_\lambda$ 是 $\mathscr{U}$ 的互不相交的精确开加细. ∎

推论 2.1.11 设 X 是 Lindelöf 空间. 若 indX=0, 则 IndX=dimX=0.

证明 因为 indX=0, 所以 X 是完全正则空间, 于是 X 是正规空间. 由定理 2.1.10, 只须证明 IndX=0. 设 A, B 是空间 X 的不相交闭集. 对于每一 $x\in X$, 存在 X 中含点 x 的开闭集 W_x 使得 $A\cap W_x=\varnothing$ 或者 $B\cap W_x=\varnothing$. X 的开覆盖 $\{W_x\}_{x\in X}$ 存在可数的子覆盖 $\{W_{x_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 令 $U_i=W_{x_i}\setminus\bigcup_{j<i}W_{x_j}$, 则 U_i 是 X 的开闭集. 从而 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的互不相交的开覆盖. 让 $U=\bigcup\{U_i: U_i\cap A\neq\varnothing\}$, 则 U 是 X 的开闭集且 $A\subset U\subset X\setminus B$. 故 IndX=0.
∎

由此, 对于无理数空间$\mathbb{P}$的任一非空子空间 X, indX=IndX=dimX=0.

例 2.1.12 Baire 零维空间.

对于任意非空集合 X 及 $n\in\mathbb{N}$, 令 $X_n=X$. 对于笛卡儿积 $M=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 中的任意两点 $x=(x_n)$和 $y=(y_n)$, 定义 $d(x, y)=\begin{cases}0, & x=y\\ \max\{1/n: x_n\neq y_n, n\in\mathbb{N}\}, & x\neq y\end{cases}$. 下面证明 d 满足度量公理. 显然, d 满足正定性和对称性. 对于任意的 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, $z=(z_n)\in M$, 为了证明 $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)$, 不妨设 $d(x, y)>0$, 于是存在 $k\in\mathbb{N}$使得 $d(x, y)=1/k$, 从而 $x_k\neq y_k$ 且当 $n<k$ 时 $x_n=y_n$. 若存在 $n<k$ 使得 $x_n\neq z_n$, 则 $d(x, z)\ge 1/n>1/k$, 从而 $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)$; 若当 $n<k$ 时总有 $x_n=z_n$, 如果 $d(x, z)=1/k$, 则 $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)$, 如果 $d(x, z)=1/m$ 且 $m>k$, 则 $x_k=z_k$, 由于 $x_k\neq y_k$, 所以 $z_k\neq y_k$, 从而 $d(z, y)=1/k$, 于是也有 $d(x, y)\le d(x, z)+d(z, y)$. 综上所述, (M, d)是度量空间.

对于空间 M 中的任意两点 $x=(x_n)$和 $y=(y_n)$, 及 $0<r\le 1$, 如果 $B_d(x, r)\cap B_d(y, r)\neq\varnothing$, 设 $z=(z_n)\in B_d(x, r)\cap B_d(y, r)$, 取 $k\in\mathbb{N}$使得 $1/(k+1)<r\le 1/k$, 则当 $n\le k$ 时有 $x_n=z_n=y_n$, 于是 $B_d(x, r)=B_d(y, r)$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{B}_i=\{B_d(x, 1/i): x\in M\}$, 则 M 的开覆盖 $\mathscr{B}_i$ 中的任意两元或者相等或者不相交, 于是 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_i$ 是 M 的 σ 局部有限的开闭基. 对于 M 的闭集 A, 包含 A 的开集 V, 及 $i\in\mathbb{N}$, 令 $V_{2i}=\bigcup\{U\in\mathscr{B}_i: U\subset V\}$, $V_{2i+1}=\bigcup\{U\in\mathscr{B}_i: U\cap A=\varnothing\}$, 则

V_{2i}和V_{2i+1}都是M的开闭集且$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{2i}$=V, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{2i+1}$=M╲A, 于是$\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是M的覆盖. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 令$U_i=V_i\setminus\bigcup_{j<i} V_j$, 则$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是M的互不相交的开覆盖. 置$U=\bigcup\{U_i : U_i\subset V\}$, 则U是M的开闭集且$A\subset U\subset V$. 故IndM=0, 从而indM=dimM=0. 所以M常称为Baire零维空间(Baire's zero-dimensional space).

对于每一$n\in\mathbb{N}$. 设d_n是X_n上的离散度量, 则由d_n导出的X_n上的度量拓扑是离散拓扑. 对$M=\prod_{n=1}^{\infty} X_n$中的任意两点$x=(x_n)$和$y=(y_n)$, 定义$d'(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x_n, y_n)$, 由定理2.1.9, d'是M上的度量且由d'导出的M上的度量拓扑就是离散空间族$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的积拓扑τ. 对于每一$x=(x_n)\in M$, $k\in\mathbb{N}$, 令$B(x_1, x_2, \ldots x_k)=\{y=(y_n)\in M$: 当$n\le k$时有$y_n=x_n\}=\bigcap_{n\le k} p_n^{-1}(x_n)$, 则$\{B(x_1, x_2, \ldots x_k) : x\in M, k\in\mathbb{N}\}$是积拓扑$\tau$的(由开闭集组成的)基, 即它是由d'导出的M上度量拓扑的基. 另一方面, $B_d(x, 1/k)=\{y=(y_n)\in M$: 当$n\le k$时有$x_n=y_n\}=B(x_1, x_2, \ldots x_k)$, 所以由度量d导出的M上的度量拓扑就是由度量d'导出的M上的度量拓扑. 因此, 可将Baire零维空间等同于离散空间X的可数次积空间X^{ω}. 若$|X|=\lambda$, 也记Baire零维空间X^{ω}为$B(\lambda)$. ∎

上述例子的证明表明: 对于具有σ局部有限开闭基的非空空间X有IndX=0.

练习

2.1.1 设(X, d)是度量空间. 证明: 度量函数$d: X\times X\to[0, +\infty)$是连续的.

2.1.2 对于实直线ℝ, 定义$d': X\times X\to[0, +\infty)$使得$d'(x, y)=\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|$. 证明: d'是ℝ上的度量, 且d'导出ℝ上的度量拓扑就是ℝ上的欧几里得拓扑.

2.1.3 对实数平面$\mathbb{R}^2$的任意两点$x=(x_1, x_2)$和$y=(y_1, y_2)$, 定义$d_1(x, y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, $d_2(x, y)=\max(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|)$, $d_3(x, y)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$. 证明: d_1, d_2和d_3都满足度量公理, 且导出$\mathbb{R}^2$上相同的度量拓扑.

2.1.4 举例说明: 存在度量空间(X, d)使得 $\overline{B_d(x,\varepsilon)} \neq \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

2.1.5 度量空间是第一可数空间.

2.1.6 设 X 是可度量化空间. 若空间 Y 同胚于空间 X, 则 X 也是可度量化空间.

2.1.7 设$\{x_n\}$是 T_2 空间 X 的收敛序列. 若$\{x_n\}$收敛于 x, 则$\{x\}\bigcup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$是 X 的可度量化的子空间.

2.1.8 若正则的 T_1 空间 X 是非空的可数空间, 则 IndX=0.

§2.2 度量空间是仿紧空间

本节继续介绍度量空间的基本性质, 主要涉及度量空间的仿紧性、可数性和紧性及一些等价刻画. 首先介绍著名的 A. H. Stone 定理: 度量空间是仿紧空间. 这是度量空间理论中最深刻、最重要的定理.

定义 2.2.1 设(X, d)是度量空间. 对于 X 中的点 x 及 X 的非空子集 A 和 B, 定义 $d(x, A)=\inf\{d(x, y) : y\in A\}$, $d(A, B)=\inf\{d(z, y) : z\in A, y\in B\}$. 称 d(x, A)为点 x 与集 A 之间的距离(distance), d(A, B)为集 A 与 B 之间的距离. 规定 $d(x, \varnothing)=1$, $d(\varnothing, A)=d(\varnothing, B)=1$.

引理 2.2.2 设 A 是度量空间(X, d)的子集, 令 f(x)=d(x, A), 则 $f: X\to[0, +\infty)$是连续函数.

证明 对于任意的 x, $y\in X$, 由三角不等式有 $\inf_{z\in A}\{d(x, z)\}\leq d(x, y)+\inf_{z\in A}\{d(y, z)\}$, 即 $f(x)\leq d(x, y)+f(y)$, 从而 $f(x)-f(y)\leq d(x, y)$. 由 x, y 的任意性知 $f(y)-f(x)\leq d(x, y)$. 于是 $|f(x)-f(y)|\leq d(x, y)$, 所以对于 r>0, $f(B(x, r))\subset(f(x)-r, f(x)+r)$. 故 f 是连续函数. ■

引理 2.2.3 设 A 是度量空间(X, d)的子集, 则$\overline{A}=\{x\in X : d(x, A)=0\}$.

证明 设 f(x)=d(x, A), 则 $A\subset f^{-1}(0)=\{x\in X : d(x, A)=0\}$. 由引理 2.2.2, $f: X\to[0, +\infty)$是连续函数, 于是 $f^{-1}(0)$是 X 的闭子集, 从而$\overline{A}\subset f^{-1}(0)$. 若 $y\notin\overline{A}$, 存在 r>0 使得 $B(y, r)\bigcap A=\varnothing$, 于是 $f(y)\geq r$, 从而 $y\notin f^{-1}(0)$, 所以 $f^{-1}(0)\subset\overline{A}$. 故$\overline{A}=\{x\in X : d(x, A)=0\}$. ■

空间 X 称为 perfect, 若 X 的每一闭集是 X 的 G_δ集(G_δ-set, 可数个开集的交集), 等价于 X 的每一开集是 X 的 F_σ集(F_σ-set, 可数个闭集的并集). 在实变函数论中, 术语 perfect 是指没有孤立点的闭集.

定理 2.2.4　度量空间是 T_2, perfect 正规空间[32].

证明　设(X, d)是度量空间. 先证明 X 是 T_2 空间. 对于 X 中不同的两点 x 和 y, 让 r=d(x, y)/2, 那么 r>0 且 B(x, r)和 B(y, r)是 X 中分别含有点 x 和 y 的不相交的开集, 所以 X 是 T_2 空间.

设 F 是 X 的闭集, 由引理 2.2.3, F={x∈X : d(x, F)=0}. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 G_n={x∈X : d(x, F)<1/n}, 由引理 2.2.2, G_n 是 X 的开集. 易验证 F=$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, 所以 F 是 X 的 G_δ 集. 故 X 是 perfect 空间.

对于 X 中不相交的闭集 A 和 B, 由引理 2.2.3, d(x, A)+d(x, B)>0. 定义 h: X→[0, 1]使得 $h(x)=\dfrac{d(x, A)}{d(x, A)+d(x, B)}$. 由引理 2.2.2, h 连续, 且 h(A)⊂{0}, h(B)⊂{1}. 故 h^{-1}([0, 1/2))和 h^{-1}((1/2, 1))是 X 中不相交的开集且分别包含 A 和 B. 因此, X 是正规空间. ▮

定理 2.2.5　(Stone 定理[1948])度量空间是仿紧空间.

证明　设$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是度量空间(X, d)的开覆盖. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, $n\in\mathbb{N}$, 置

(5.1) $U_{\alpha,n}=\{x\in X : B(x, 1/2^n)\subset U_\alpha\}$.

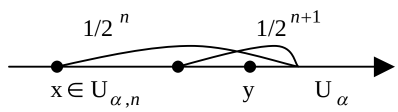

图　(5.1)和(5.2)

则 $U_\alpha=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{\alpha,n}$, 并且 $x\in U_{\alpha,n}$ 当且仅当 d(x, X╲U_α)≥$1/2^n$ (练习 2.2.1), 于是

(5.2) 若 $x\in U_{\alpha,n}$, $y\notin U_{\alpha,n+1}$, 则 d(x, y)>$1/2^{n+1}$.

把指标集Λ良序化, 置

(5.3) $U^*_{\alpha,n}=U_{\alpha,n}\setminus\bigcup_{\gamma<\alpha} U_{\gamma,n+1}$, $\alpha\in\Lambda$.

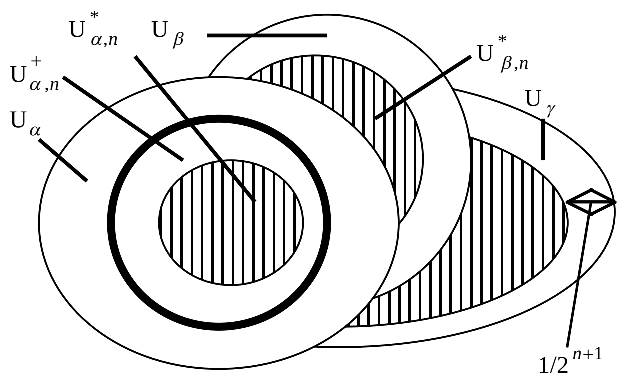

图　Stone 定理　$\alpha<\beta<\gamma$

则对于任意的 α, $\beta\in\Lambda$, 若 $\alpha\neq\beta$, 按 $\alpha<\beta$ 或 $\beta<\alpha$, 由(5.3)可得

[32] Perfect normality 于 1932 年由 E. Čech 定义.

(5.4) $U^*_{\beta,n} \subset X \setminus U_{\alpha,n+1}$或 $U^*_{\alpha,n} \subset X \setminus U_{\beta,n+1}$.

若 $x \in U^*_{\alpha,n}$，$y \in U^*_{\beta,n}$，由(5.3)和(5.4)，则当$\alpha < \beta$时，$x \in U_{\alpha,n}$，$y \notin U_{\alpha,n+1}$；当$\beta < \alpha$时，$y \in U_{\beta,n}$，$x \notin U_{\beta,n+1}$，所以由(5.2)总有 $d(x, y) > 1/2^{n+1}$，即

(5.5) $d(U^*_{\alpha,n}, U^*_{\beta,n}) \geq 1/2^{n+1}$.

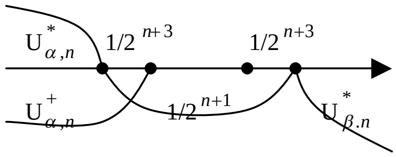

图 (5.7)，(5.8) 及$\{U^+_{\alpha,n}\}$的离散性

对于每一 $x \in X$，在Λ中存在最小的α使得 $x \in U_{\alpha}$，于是存在 $n \in \mathbb{N}$使得 $x \in U_{\alpha,n}$，由(5.3)，$x \in U^*_{\alpha,n}$. 这表明

(5.6) $\bigcup\{U^*_{\alpha,n} : \alpha \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\} = X$.

对于任意的$\alpha \in \Lambda$，$n \in \mathbb{N}$，置

(5.7) $U^+_{\alpha,n} = \{x \in X : d(x, U^*_{\alpha,n}) < 1/2^{n+3}\}$.

则

(5.8) $U^*_{\alpha,n} \subset U^+_{\alpha,n} \subset U_{\alpha}$.

由(5.5)，(5.7)及三角不等式，易证对于任意的$\alpha \neq \beta \in \Lambda$有 $d(U^+_{\alpha,n}, U^+_{\beta,n}) \geq 1/2^{n+2}$，于是对于每一 $x \in X$，$B(x, 1/2^{n+3})$至多与$\{U^+_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$中的一个元相交，所以$\{U^+_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的离散的开集族. 至此可知，$\{U^+_{\alpha,n}\}_{\alpha\in\Lambda, n\in\mathbb{N}}$是$\{U_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$的$\sigma$离散的开加细. 由定理 2.2.4 及定理 1.5.6 知，X 是仿紧空间. ∎

1948 年 A. H. Stone 事实上证明了度量空间的每一开覆盖具有局部有限且σ离散的开加细，所以从定义知度量空间是仿紧空间. 这里仅证明度量空间的每一开覆盖具有σ离散的开加细，要获得既σ离散又局部有限的开加细还需要进一步构造更精细的集族. Stone 定理的证明是一般拓扑学中最精美的证明之一. 证明的思想通过提炼产生了许多重要的概念和一般性的方法. 如定理 1.5.6 中证明“若空间 X 的每一开覆盖有星开加细，则 X 的每一开覆盖有σ离散的开加细”就是使用 Stone 定理的技巧，其中关键的集合 $U_{\alpha,n}$的构造，在定理 1.5.6 中的星形邻域(定理 1.5.6 的(6.2))类似于 Stone 定理中的球形邻域(定理 2.2.5 的(5.1)). 事实上，对于度量空间(X, d)及 $n \in \mathbb{N}$，置 $\mathcal{U}_n = \{B(x, 1/2^n) : x \in X\}$，那么对于每一 $x \in X$ 有 st(x,

$\mathscr{U}_{n+1}$)$\subset$B(x, 1/2^n), st(B(x, 1/2^{n+2}), $\mathscr{U}_{n+2}$)$\subset$B(x, 1/2^n). 下面介绍 Stone 定理在维数论中的一个应用.

引理 2.2.6 设(X, d)是度量空间, 则下述条件相互等价:

(1) IndX=0;

(2) X 具有互不相交的开覆盖列{$\mathscr{W}_n$}使得(每一 $\mathscr{W}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{W}_n$ 且)$\mathscr{W}_n$ 的每一元的直径小于 1/n;

(3) X 具有σ局部有限的(开)闭基.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖. 对于每一 n$\in\mathbb{N}$, 由 Stone 定理, $\mathscr{U}$ 具有局部有限的开加细 $\mathscr{V}$={V$_\alpha$}$_{\alpha<\lambda}$ 使得每一 d(V$_\alpha$)<1/n. 由定理 1.4.15(单位分解定理)的(15.1), {V$_\alpha$}$_{\alpha<\lambda}$ 存在精确的闭加细{F$_\alpha$}$_{\alpha<\lambda}$. 因为 IndX=0, 存在 X 的开闭集 U$_\alpha$ 使得 F$_\alpha\subset$U$_\alpha\subset$V$_\alpha$. 对于每一$\alpha<\lambda$, 令 W$_\alpha$=U$_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$, 则 W$_\alpha$ 是 X 的开闭集. 置 $\mathscr{W}$={W$_\alpha$}$_{\alpha<\lambda}$. 则 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{U}$ 的互不相交的开加细且每一 d(W$_\alpha$)<1/n. 由归纳法易知存在 X 的开覆盖列{$\mathscr{W}_n$}满足(2).

(2)$\Rightarrow$(3)是显然的. 例 2.1.12 已证明了(3)$\Rightarrow$(1). █

由于引理 2.2.6 的(3)是遗传性质, 所以

定理 2.2.7 设 X 是度量空间, 则 IndX=0 是关于非空子集遗传的.█

本节的第二部分转入讨论度量空间的可数性, 涉及第二可数性、Lindelöf 性、$\aleph_1$紧性、可数链条件和可分性. 设 X 是拓扑空间. X 称为第二可数空间(或满足第二可数公理, second countable space), 若 X 具有可数基. X 称为$\aleph_1$紧空间($\aleph_1$-compact space), 若 X 的任一闭离散子空间是可数的. X 称为满足可数链条件(countable chain condition, 简记为 ccc), 若 X 中的互不相交的非空开集族是可数的. X 称为可分空间(separable space), 若 X 具有可数的稠密子集. 可以验证, 第二可数性$\Rightarrow$Lindelöf 性$\Rightarrow\aleph_1$紧性; 第二可数性$\Rightarrow$可分性$\Rightarrow$可数链条件. 在度量空间中这些性质是相互等价的.

定理 2.2.8 设(X, d)是度量空间, 则下述条件相互等价:

(1) X 是第二可数空间;

(2) X 是 Lindelöf 空间;

(3) X 是 $\aleph_1$ 紧空间;

(4) X 满足可数链条件;

(5) X 是可分空间.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设度量空间 X 是第二可数空间, 即 X 具有可数基 $\mathscr{B}$. 对于 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$, 让 $\mathscr{B}'$={B$\in\mathscr{B}$: 存在 U$\in\mathscr{U}$ 使得 B$\subset$U}, 则 $\mathscr{B}'$ 是 X 的可数覆盖. 事实上, 对于每一 x$\in$X, 存在 U$\in\mathscr{U}$ 使得 x$\in$U, 由于 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 又存在 B$\in\mathscr{B}$ 使得 x$\in$B$\subset$U, 这时 B$\in\mathscr{B}'$. 记 $\mathscr{B}'=\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 n$\in\mathbb{N}$, 存在 $U_n\in\mathscr{U}$ 使得 $B_n\subset U_n$, 于是 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathscr{U}$ 的可数子覆盖. 故 X 是 Lindelöf 空间.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 X 是 Lindelöf 空间. 若 A 是 X 的闭离散子空间, 则 A 是 Lindelöf 空间, 于是 A 的开覆盖{{x} : x$\in$A}有可数的子覆盖, 所以 A 只能是可数集. 故 X 是 $\aleph_1$ 紧空间.

(3)$\Rightarrow$(4). 设 X 是 $\aleph_1$ 紧空间. 让 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的互不相交的非空开集族. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 取定 $x_\alpha\in O_\alpha$. 让 D=$\{x_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, 则每一$(O_\alpha\setminus\{x_\alpha\})\cap D=\varnothing$, 于是$(O_\alpha\setminus\{x_\alpha\})\cap\overline{D}=\varnothing$, 所以 $O_\alpha\cap\overline{D}=\{x_\alpha\}$, 从而 D=$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha)\cap\overline{D}$, 因此 D 是 $\overline{D}$ 的开子集. 由定理 2.2.4 及 $\overline{D}$ 是度量空间, D 是 $\overline{D}$ 的 F_σ 集, 即存在 $\overline{D}$ 的闭集列$\{D_n\}$使得 D=$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n$. 这时每一 D_n 是 X 的闭离散子空间, 由 X 的 $\aleph_1$ 紧性, D_n 是可数的. 故 D 是 X 的可数子集, 即 $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的可数开集族.

(4)$\Rightarrow$(5). 设 X 满足可数链条件. 对于每一 n$\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{F}_n$={F$\subset$X : 若 x, y$\in$F 且 x$\neq$y, 则 d(x,y)>1/n}, 则 $\mathscr{F}_n$ 具有有限特征, 即 F$\in\mathscr{F}_n$ 当且仅当 F 的每一有限子集是 $\mathscr{F}_n$ 的元. 由 Tukey 引理(引理 1.1.11), 设 C_n 是 $\mathscr{F}_n$ 中的极大元. 让 $\mathscr{B}_n$={B(x, 1/2n) : x$\in C_n$}, 则 $\mathscr{B}_n$ 是 X 的互不相交的开集族, 由于 X 满足可数链条件, 于是 $\mathscr{B}_n$ 是可数族, 从而 C_n 是可数集. 让 C=$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n$, 则 C 是 X 的可数子集. 下证 C 是 X 的稠密子集, 即 $\overline{C}$=X, 这等价于证明对于每一 x$\in$X 和 r>0 有 B(x, r)$\cap$C$\neq\varnothing$. 取 k$\in\mathbb{N}$使得 1/k<r, 若对于每一 c$\in C_k$ 有 d(x, c)>1/k, 则 x$\notin C_k$ 且 $C_k\cup\{x\}\in\mathscr{F}_k$, 这与 C_k 是 $\mathscr{F}_k$ 的极大元相矛盾, 所以存在 c$\in C_k\subset$C 使得 d(x, c)$\leq$1/k<r, 从而 B(x, r)$\cap$C$\neq\varnothing$. 故 X 是可分空间.

(5)$\Rightarrow$(1). 设 X 是可分空间. 让 C={x_n : n$\in\mathbb{N}$}是 X 的可数的稠密子集. 令 $\mathscr{B}$={B(x_n, 1/k) : n, k$\in\mathbb{N}$}, 则 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数开集族. 下证 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的基. 对于每一 x$\in$X 及 x 的邻域 U, 存在 r>0 使得 B(x, r)$\subset$U. 由于 C 是 X 的稠密子集, 存在 n, k$\in\mathbb{N}$使得 $x_n\in$B(x, 1/k)且 2/k<r, 则 x$\in$B(x_n, 1/k)$\subset$B(x, r)$\subset$U. 事实上, 若 y$\in$B(x_n, 1/k), 则 d(y, x)$\le$d(y, x_n)+d(x_n, x)<1/k+1/k<r, 所以 y$\in$B(x, r). 故 X 具有可数基. ▮

定理 2.2.9 设(X, d)是度量空间, 则下述条件相互等价:

(1) X 是紧空间;

(2) X 是可数紧空间;

(3) X 是序列紧空间;

(4) X 是伪紧空间.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)是显然的. 因为度量空间是第一可数空间(练习 2.1.5), 由定理 1.2.6, (2)$\Leftrightarrow$(3). 由定理 1.2.10, (2)$\Rightarrow$(4). 由定理 1.2.12 和定理 2.2.4, (4)$\Rightarrow$(3). 下面证明(2)$\Rightarrow$(1). 设 X 是可数紧空间, 由定理 1.2.4, X 是$\aleph_1$紧空间, 再由定理 2.2.8, X 是 Lindelöf 空间, 从而 X 是可数紧的 Lindelöf 空间, 即 X 是紧空间. ▮

本节最后说明选择公理在度量空间理论中的作用. Stone 定理的证明使用有 Zermelo 良序定理, 定理 2.2.8 的证明使用了 Tukey 引理, 这些都是本质的要求. 因为一方面 Good, Tree 和 Watson[1998]证明了假设集论公理 ZF+DC(Principle of Dependent Choice)存在非仿紧的度量空间, 另一方面 Good 和 Tree[1995]证明了命题"存在第二可数的度量空间既不是可分空间也不是 Lindelöf 空间"是与 ZF 相容的(consistent), 同样命题"存在紧度量空间既不是可分空间也不是第二可数空间"也是与 ZF 相容的.

练习

2.2.1 设 A 是度量空间(X, d)的非空子集. 若 x$\in$X, r>0, 则 d(x, A)$\ge$r 当且仅当 B(x, r)$\bigcap$A=$\varnothing$.

2.2.2 序数空间[0, ω_1)不是 perfect.

2.2.3 证明: 度量空间的非空开集是函数开的.

2.2.4 证明: Hilbert 空间是可分空间.

2.2.5 设(X, d)是度量空间, 对于 X 的子集 A 及 r>0, 记 B(A, r)={x$\in$X : d(x, A)<r}. 若 K

是 X 的紧子集，证明: $\{B(K, 1/n) : n\in \mathbb{N}\}$是 K 在 X 中的邻域基.