§6.2　Hurewicz 空间

本节介绍 C_p 理论中的Hurewicz 空间性质, 这是一种介于 σ 紧性质与Lindelöf空间性质之间的拓扑性质. 由推论 5.4.3 知, 函数空间的 tightness 与底空间的 Lindelöf 性质密切相关, 本节将进一步说明函数空间的可数扇 tightness, 可数强扇 tightness 分别与底空间的Hurewicz 性质, 性质 C”密切相关.

空间 X 称为P 空间(P-space; Gillman, Henriksen[1954]), 若 X 的每一 G_δ 集是X 的开集. X 是 P 空间当且仅当 X 的每一 F_σ 集是 X 的闭集. 这P 空间不同于在广义度量空间理论中用于刻画与度量空间之积空间是正规空间的 P 空间(Morita[1964]).

引理 6.2.1　伪紧 P 空间是有限集.

证明　设 X是完全正则的伪紧 P 空间. 若 X 含有可数无限子集 $A=\{x_i : i\in\mathbb{N}\}$, 则 A 的任一可数子集(X 的 F_σ 集)是 X 的闭子集, 于是 A 是 X 的可数闭离散子集. 不妨设存在 X 的不相交的开集列$\{V_i\}$使得每一 $x_i\in V_i$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 存在 X 的开集 U_i 使得 $x_i\in U_i\subset\overline{U}_i\subset V_i$, 从而存在 $f_i\in C(X,\mathbb{R})$使得 $f_i(x_i)=i$, $f_i(X\setminus U_i)=\{0\}$. 定义 f: $X\to\mathbb{R}$使得每一 $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$, 则 f 是 X 上的无界连续函数, 与 X 是伪紧空间相矛盾. 故 X 是有限集.

∎

定理 6.2.2　若 $C_p(X)$是σ 可数紧空间, 则 X 是有限集.

证明　记 $C_p(X)=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_i$, 其中每一 Z_i 是 $C_p(X)$的可数紧子集. 先证明 X 是伪紧的 P 空间.

若 X 不是伪紧空间, 则存在 X 上的无界函数 $h\in C(X,\mathbb{R})$. 取 X 中的序列$\{x_i\}$使得每一 $|h(x_{i+1})|>|h(x_i)|+1$. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 置 $U_i=\{x\in X : |h(x)-h(x_i)|<1/2\}$, 则$\{U_i\}$是X 的离散开集列且每一 $x_i\in U_i$, 让 $B_i=\{g(x_i) : g\in Z_i\}=e_{x_i}(Z_i)$, 其中 $e_{x_i}: C_p(X)\to\mathbb{R}$是赋值函数(定义见推论 4.5.12 后), 由 e_{x_i} 的连续性, B_i是$\mathbb{R}$中的有界集, 于是存在 $r_i\in\mathbb{R}\setminus B_i$. 因为$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是离散的, 由引理 6.2.1类似的论证, 存在连续函数$f:X\to\mathbb{R}$使得 $f(x_i)=r_i$. 则$f\notin\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_i$, 矛盾. 故 X 是伪紧空间.

若 X 不是 P 空间，则存在 X 的递增的闭集列$\{F_i\}$和 $z^*\in \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i} \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$. 令 $Z=\{f\in C_p(X) : f(z^*)=0\}$，则 Z 是 $C_p(X)$的闭集，所以 Z 是σ可数紧的. 记 $Z=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_{i0}$，其中每一 Z_{i0}是 $C_p(X)$的可数紧子集.

(2.1) 对于每一$\varepsilon>0$, $k\in\mathbb{N}$, 存在 $i_k\in\mathbb{N}$使得当 $f\in Z_{k0}$时有 $z_f\in F_{i_k}$满足 $f(z_f)<\varepsilon$.

若不然，对于每一 $i\in\mathbb{N}$，存在 $f_i\in Z_{k0}$使得当 $z\in F_i$时有 $f_i(z)\geq\varepsilon$. 由 Z_{k0}的可数紧性，序列$\{f_i\}$存在聚点 f，则当 $z\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$时有 $f(z)\geq\varepsilon$，于是 $f(z^*)\geq\varepsilon$. 然而，$f\in Z_{k0}\subset Z$，又有 $f(z^*)=0$，矛盾.

下面继续设 X 不是 P 空间的证明. 对于每一 $k\in\mathbb{N}$，取$\varepsilon=1/2^k$，存在 $i_k\in\mathbb{N}$满足(2.1)的要求. 由完全正则性，存在 $g_k\in C(X, [0, 1/2^k])$使得 $g_k(z^*)=0$ 且 $g_k(F_{i_k})=1/2^k$. 定义 $h:X\to\mathbb{R}$使得每一 $h(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$，则 h 连续且 $h(z^*)=0$，所以 $h\in Z$，因此存在 $k\in\mathbb{N}$使得 $h\in Z_{k0}$，由(2.1)，存在 $z_h\in F_{i_k}$满足 $h(z_h)<1/2^k$，这与 $h(z_h)\geq 1/2^k$相矛盾. 故 X 是 P 空间.

由引理 6.2.1 知 X 是有限的. ∎

空间 X 称为 Hurewicz 空间(Hurewicz space; Hurewicz[1927], Lelek[57][1969])，若对于 X 的每一开覆盖的序列$\{\mathscr{U}_n\}$存在有限子集 $\mathscr{B}_n\subset\mathscr{U}_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$ 是 X 的覆盖. 显然，σ紧空间是 Hurewicz 空间，Hurewicz 空间是 Lindelöf 空间. X 称为解析空间(analytic space; Whyburn[1942])，若 X 是无理数空间$\mathbb{P}$的连续象. 这解析空间不同于复分析中的“analytic space”. Polish 空间(即可分的完全度量空间)和有理数空间$\mathbb{Q}$都是解析空间(练习 2.6.2 和练习 2.6.3). J. Calbrix 证明了下述结果(见 Arhangel’skiĭ[1992]).

引理 6.2.3 Hurewicz 的解析空间是σ紧空间. ∎

引理 6.2.4 X 是紧空间当且仅当 X^ω是 Hurewicz 空间.

证明 显然，紧空间的可数次积空间是 Hurewicz 空间. 设 X^ω 是 Hurewicz 空间. 于是 X 是 Lindelöf 空间，为了证明 X 是紧空间，只须证明 X 是可数紧空间. 若不然，不妨设 X 含有

[57] A. Lelek 是波兰数学家 B. Knaster(1893-1980)的学生.

闭子空间$\mathbb{N}$, 于是 X^{ω}的闭子空间$\mathbb{N}^{\omega}$是 Hurewicz 空间, 但是$\mathbb{N}^{\omega}$同胚于无理数空间$\mathbb{P}$(定理 2.6.9), 于是$\mathbb{P}$是 Hurewicz 空间, 这与引理 6.2.3 相矛盾. ▌

定理 6.2.5 (Arhangel'skiĭ[1986])空间 $C_p(X)$有可数扇 tightness 当且仅当对于每一 $n\in\mathbb{N}$, X^n是 Hurewicz 空间.

证明 必要性. 设空间 $C_p(X)$有可数扇 tightness. 对于任意固定的 $n\in\mathbb{N}$, 设$\{\mathscr{U}_k\}$是空间 X^n的开覆盖列. 对于每一$k\in\mathbb{N}$, X 的子集族$\mathscr{V}$称为是δ_k小的, 若对于每一 $V_i\in\mathscr{V}(\forall i\le n)$存在 $U\in\mathscr{U}_k$使得$\prod_{i\le n}V_i\subset U$. 记$\Delta_k$是 X 中的所有$\delta_k$小的有限开集族的全体. 对于每一$\mathscr{V}\in\Delta_k$, 让 $F_{\mathscr{V}}=\{f\in C_p(X):f(X\setminus\bigcup\mathscr{V})=\{0\}\}$. 记 $A_k=\bigcup\{F_{\mathscr{V}}:\mathscr{V}\in\Delta_k\}$. 下面先证明$A_k$是 $C_p(X)$的稠密子集.

设 $f\in C_p(X)$且 $W(f, K,\varepsilon)$是 f 在 $C_p(X)$中的任一基本邻域. 因为 K 是 X 的非空有限子集, 存在 X 的有限的开集族 $\mathscr{W}$ 使得对于每一$(y_1, y_2,\dots, y_n)\in K^n$存在 $\mathscr{W}$ 的有限子集$\{W_i\}_{i\le n}$和$U\in\mathscr{U}_k$使得$y_i\in W_i(\forall i\le n)$且$\prod_{i\le n}W_i\subset U$. 于是$K\subset\bigcup\mathscr{W}$. 对于每一$x\in K$. 令$V_x=\bigcap\{W\in\mathscr{W}:x\in W\}$, $\mathscr{V}=\{V_x:x\in K\}$. 则$K\subset\bigcup\mathscr{V}$, 且集族$\mathscr{V}$是$\delta_k$小的. 事实上, 任取$\prod_{i\le n}V_{x_i}$, 其中每一$x_i\in K$. 存在$W_i\in\mathscr{W}$和$U\in\mathscr{U}$使得$x_i\in W_i$且$\prod_{i\le n}W_i\subset U$. 因为每一$V_{x_i}\subset W_i$, 所以$\prod_{i\le n}V_{x_i}\subset U$. 现在, 取 $g\in C_p(X)$使得 $f_{|K}=g_{|K}$且 $g(X\setminus\bigcup\mathscr{V})=\{0\}$, 则$g\in F_{\mathscr{V}}\subset A_k$, 从而$W(f, K, \varepsilon)\bigcap A_k\ne\varnothing$. 因而$\overline{A}_k=C_p(X)$.

令$\tilde{f}$是 X 上取值恒为 1 的函数, 则$\tilde{f}\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A}_k$. 对于每一$k\in\mathbb{N}$, 存在$A_k$的有限子集$B_k$使得$\tilde{f}\in\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k}$. 从而存在$\Delta_k$的有限子集$\Gamma_k$使得 $B_k\subset\bigcup\{F_{\mathscr{V}}:\mathscr{V}\in\Gamma_k\}$. 设$\mathscr{V}\in\Gamma_k$, 对于每一$\xi=(V_1, V_2,\dots, V_n)\in\mathscr{V}^n$, 选取$G_\xi\in\mathscr{U}_k$使得$\prod_{i\le n}V_i\subset G_\xi$. 因为$\Gamma_k$是有限的且每一 $\mathscr{V}\in\Gamma_k$是有限的, 所以族 $\mathscr{G}_k=\{G_\xi:\xi\in\mathscr{V}^n, \mathscr{V}\in\Gamma_k\}$是有限的. 显然, $\mathscr{G}_k\subset\mathscr{U}_k$. 下面再证明$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{G}_k$覆盖$X^n$.

对于任意的$(x_1, x_2,\dots, x_n)\in X^n$, 让 $H=\{h\in C_p(X):$ 对于每一 $i\le n$ 有 $h(x_i)>0\}$, 则 H

是$\tilde{f}$在$C_p(X)$中的开邻域. 因为$\tilde{f}\in\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k}$，存在$m\in\mathbb{N}$使得$H\bigcap B_m\neq\varnothing$，于是对于某个$\mathcal{V}\in\Gamma_m$有$H\bigcap F_{\mathcal{V}}\neq\varnothing$. 设$g\in H\bigcap F_{\mathcal{V}}$. 则对于每一$i\leq n$有$g(x_i)>0$且当$x\in X\setminus\bigcup\mathcal{V}$时有$g(x)=0$. 取$V_i\in\mathcal{V}$使得$x_i\in V_i$ ($\forall i\leq n$)，则存在$G_\xi\in\mathcal{G}_m$使得$(x_1, x_2,\ldots, x_n)\in\prod_{i\leq n}V_i\subset G_\xi$. 因而$(x_1, x_2,\ldots, x_n)\in\bigcup(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{G}_k)$. 故$X^n$是Hurewicz空间.

充分性. 设对于每一$n\in\mathbb{N}$, X^n是Hurewicz空间. 固定$f\in C_p(X)$及$C_p(X)$的子集列$\{A_k\}$使得$f\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k}$. 对于每一$n, k\in\mathbb{N}$及$x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)\in X^n$，存在$g_{x,k}\in W(f, x_1, x_2,\ldots, x_n, 1/n)\bigcap A_k$. 对于每一$i\leq n$, 因为$|g_{x,k}(x_i)-f(x_i)|<1/n$, 由f及$g_{x,k}$的连续性, 存在$x_i$的开邻域$O_i$使得当$y_i\in O_i$时有$|g_{x,k}(y_i)-f(y_i)|<1/n$. 集合$U_{x,k}=\prod_{i\leq n}O_i$是x在$X^n$中的邻域, 于是$\mathcal{U}_{n,k}=\{U_{x,k}: x\in X^n\}$覆盖$X^n$，且对于每一$(y_1, y_2,\ldots, y_n)\in U_{x,k}$有$|g_{x,k}(y_i)-f(y_i)|<1/n$. 因为$X^n$是Hurewicz空间, 存在$X^n$的有限子集列$\{P_{n,k}\}_{k\geq n}$使得$\bigcup_{k\geq n}\mathcal{P}_{n,k}$覆盖$X^n$，其中每一$\mathcal{P}_{n,k}=\{U_{x,k}: x\in P_{n,k}\}$. 对于每一自然数$k\geq n$, 令$B_{n,k}=\{g_{x,k}: x\in P_{n,k}\}$, $B_k=\bigcup_{n\leq k}B_{n,k}$，则$B_k$是$A_k$的有限子集且$f\in\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k}$.

事实上, 对于f在$C_p(X)$中的任一基本邻域$W(f, y_1, y_2,\ldots, y_n, \varepsilon)$, 不妨设$1/n<\varepsilon$，则存在$k\geq n$使得$(y_1, y_2,\ldots, y_n)\in\bigcup\mathcal{P}_{n,k}$，于是存在$x\in P_{n,k}$使得$(y_1, y_2,\ldots, y_n)\in U_{x,k}$，从而$g_{x,k}\in B_{n,k}$且对于每一$i\leq n$有$|g_{x,k}(y_i)-f(y_i)|<1/n<\varepsilon$，因此$g_{x,k}\in W(f, y_1, y_2,\ldots, y_n, \varepsilon)\bigcap B_k$. 即$f\in\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B_k}$. 故, $C_p(X)$有可数扇 tightness. ∎

由此, $C_p(\mathbb{P})$没有可数扇 tightness. 但是$C_p(\mathbb{P})$有可数 tightness(推论 5.4.3).

推论 6.2.6 设X是解析空间, 则$C_p(X)$有可数扇 tightness 当且仅当X是σ紧空间. ∎

定理 6.2.7 (Arhangel'skiǐ[1986])$C_p(X)$是Hurewicz空间当且仅当X是有限集.

证明 若X是有限集, 则$C_p(X)=\mathbb{R}^X$是σ紧空间, 所以$C_p(X)$是Hurewicz空间.

反之, 设$C_p(X)$是Hurewicz空间. 先证明X是伪紧空间. 若不然, 由定理6.2.2的证明, 存在X的可数子集$A=\{x_i: i\in\mathbb{N}\}$和离散开集列$\{U_i\}$使得每一$x_i\in U_i$. 若f是A上的实值

(连续)函数，对于每一 $i\in\mathbb{N}$，存在 $f_i\in C(X,\ \mathbb{R})$使得 $f_i(x_i)=f(x_i)$且 $f_i(X\setminus U_i)=\{0\}$．定义 g: $X\to\mathbb{R}$使得每一$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)$，则 g 是 X 上的连续函数且 $g_{|A}=f$．即, A 上的每一实值函数可以扩张为 X 上的连续实值函数，所以$\mathbb{R}^A=C_p(A)=C_p(A|X)=p_A(C_p(X))$是 $C_p(X)$的连续象，从而$\mathbb{R}^A$是 Hurewicz 空间(练习 6.2.1)，这与引理 6.2.4 相矛盾．故 X 是伪紧空间．

如果 X 是无限集，则存在 X 的可数子集$\{z_i: i\in\mathbb{N}\}$和开集列$\{V_i\}$使得每一 $z_i\in V_i\subset X\setminus\{z_k: k<i\}$．对于每一$i\in\mathbb{N}$，存在$h_i\in C(X,\mathbb{R})$使得$h_i(z_i)=1$且$h_i(X\setminus V_i)=\{0\}$．定义函数$\phi: X\to\mathbb{R}^{\omega}$ 使得每一 $p_i(\phi(x))=h_i(x)$，其中 $p_i:\mathbb{R}^{\omega}\to\mathbb{R}_i=\mathbb{R}$是投影函数，则$\phi$连续且当$i\neq j\in\mathbb{N}$时有$\phi(z_i)\neq\phi(z_j)$，所以$\phi(X)$是$\mathbb{R}^{\omega}$的无限子集．显然，$\phi(X)$是紧度量空间．由推论 1.1.10，$\phi: X\to\phi(X)$是 R 商映射，再由定理 6.0.7，$C_p(\phi(X))$可闭嵌入 $C_p(X)$，从而 $C_p(\phi(X))$是 Hurewicz 空间．由$\phi(X)$是紧度量空间及推论 5.6.9, $C_k(\phi(X))$是 Polish 空间(即可分的完全度量空间)，于是 $C_k(\phi(X))$是解析空间，从而 $C_p(\phi(X))$也是解析空间．由引理 6.2.3, $C_p(\phi(X))$是σ紧空间，再由定理 6.2.2，$\phi(X)$是有限的，矛盾．故 X 是有限集．█

推论 6.2.8 若 X 是具有可数基的紧空间，则 $C_p(X)$是解析空间．

证明 因为 X 是紧度量空间，如定理 6.2.7 中关于$\phi(X)$的证明, $C_p(X)$是解析空间．█

定理 6.2.5 表明了 $C_p(X)$的可数扇 tightness 与每一 X^n 的 Hurewicz 性质之间的联系．下面定义的性质 C”将建立 $C_p(X)$的可数强扇 tightness 与每一 X^n 的性质 C”之间的联系．称空间 X 有性质 C”(property C”, Kuratowski[1966])，若对于 X 的每一开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$存在$U_n\in\mathcal{U}_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的覆盖．

显然，

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Polish 空间} \arrow[r] & \text{解析空间} \arrow[d] \\
 & \sigma\text{ 紧空间} \arrow[r] & \text{Hurewicz 空间} \arrow[r] & \text{Lindelöf 空间.} \\
\text{广义可数空间} \arrow[r] & \text{性质 C”} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

图 Lindelöf 空间类

由引理 6.2.3, 无理数空间$\mathbb{P}$是非 Hurewicz 空间的 Polish 空间. 有理数空间$\mathbb{Q}$是非 Polish 空间的σ紧空间, 解析空间且具有性质 C”. 引理 6.2.9 和例 6.2.12 将进一步说明一些不蕴含关系.

引理 6.2.9 (Sakai[1988])单位闭区间$\mathbb{I}$不具有性质 C”.

证明 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 让$\mathcal{U}_n$是$\mathbb{I}$的全体 Lebesgue 测度不超过$1/2^{n+1}$的开集族. 若$\mathbb{I}$有性质 C”, 则存在 $U_n\in\mathcal{U}_n$ 使得$\mathbb{I}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n$, 于是 $1\le\sum_{n\in\mathbb{N}}m(U_n)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}1/2^{n+1}=1/2$, 矛盾. 故$\mathbb{I}$不具有性质 C”. ∎

推论 6.2.10 (Sakai[1988])若空间 X 具有性质 C”, 则 Ind(X)=0.

证明 由推论 2.1.11, 只须证明 ind(X)=0. 对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $f\in C_p(X,\mathbb{I})$使得 f(x)=1 且 $f(X\setminus U)\subset\{0\}$. 因为 X 具有性质 C”, 所以 f(X)也具有性质 C”, 由引理 6.2.9, $f(X)\neq[0,1]$, 即存在 $y\in(0,1)\setminus f(X)$, 于是 $x\in f^{-1}((y,1])\subset U$ 且 $f^{-1}((y,1])$是 X 的开闭集. 故 ind(X)=0, 从而 Ind(X)=0. ∎

定理 6.2.11 (Sakai[1988])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) $C_p(X)$有可数强扇 tightness;

(2) X 的每一开ω覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$存在 $U_n\in\mathcal{U}_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的$\omega$覆盖;

(3) 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, X^n有性质 C”.

证明 定理 5.4.8 已证明了(1)$\Leftrightarrow$(2). 下面证明(2)$\Leftrightarrow$(3).

(3)$\Rightarrow$(2). 设对于每一$n\in\mathbb{N}$, 积空间X^n有性质C”. 让$\{\mathcal{U}_n\}$是空间X的开ω覆盖列. 按对角线方式重排集列$\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$为$\{\mathcal{U}_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 n, $m\in\mathbb{N}$, 令 $\mathcal{V}_{mn}=\{U^m\subset X^m: U\in\mathcal{U}_{mn}\}$. 对于每一 $m\in\mathbb{N}$, 由于$\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}\subset U$ 当且仅当$(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in U^m$, 所以$\mathcal{V}_{mn}$是 X^m的开覆盖. 由性质 C”, 对于 X^m的开覆盖列$\{\mathcal{V}_{mn}\}_{n\in\mathbb{N}}$存在 $U_{mn}\in\mathcal{U}_{mn}\ (\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U^m_{mn}\}_{n\in\mathbb{N}}$是$X^m$的覆盖, 则$\{U_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$是X的$\omega$覆盖. 故存在$U_n\in\mathcal{U}_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的$\omega$覆盖.

(2)$\Rightarrow$(3). 设空间 X 的每一开ω覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$, 存在 $U_n\in\mathcal{U}_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是

X 的ω覆盖. 首先, 证明 X 有性质 C". 对于 X 的每一开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 重排$\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$为$\{\mathcal{U}_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $m\in\mathbb{N}$, 让 $\mathcal{V}_{m1}=\mathcal{U}_{m1}$, $\mathcal{V}_{m2}=\{U\bigcup V : U\in\mathcal{U}_{m2}, V\in\mathcal{U}_{m3}\}$, $\mathcal{V}_{m3}=\{U\bigcup V\bigcup W : U\in\mathcal{U}_{m4}, V\in\mathcal{U}_{m5}, W\in\mathcal{U}_{m6}\}$, …. 这时, 若 $A=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$是 X 的有限子集, 则存在 $V\in\mathcal{V}_{mn}$ 使得 $A\subset V$, 所以 $\mathcal{V}_m=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{V}_{mn}$是 X 的开$\omega$覆盖. 于是存在$V_m\in\mathcal{V}_m(\forall m\in\mathbb{N})$使得$\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$是 X 的$\omega$覆盖. 故存在 $U_n\in\mathcal{U}_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的覆盖, 因此 X 有性质 C". 其次, 证明X^2有性质 C". 设$\{\mathcal{G}_n\}$是X^2的开ω覆盖列. 置$\mathcal{H}_n=\{H\subset X : H$是$X$的开集且存在$G\in\mathcal{G}_n$使得$H\times H\subset G\}$, 则$\mathcal{H}_n$是X的开$\omega$覆盖. 事实上, 设$\{x_1, x_2,\ldots, x_m\}\subset X$, 令 $F=\{(x_i, x_j)\in X^2 : i, j\le m\}$, 则存在$G\in\mathcal{G}_n$使得 $F\subset G$, 对于每一 $i, j\le m$, 存在 X 的开集 V_{ij} 和 U_{ij} 使得$(x_i, x_j)\in V_{ij}\times U_{ij}\subset G$, 令$H=\bigcup_{i\le m}(\bigcap_{j\le m}V_{ij})\bigcap(\bigcap_{j\le m}U_{ji})$, 则 H 是 X 的开集, $\{x_1, x_2,\ldots, x_m\}\subset H$ 且 $H\times H\subset G$. 由条件, 存在 $H_n\in\mathcal{H}_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的$\omega$覆盖, 于是$\{H_n\times H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$X^2$的$\omega$覆盖. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 选取 $G_n\in\mathcal{G}_n$使得 $H_n\times H_n\subset G_n$. 则$\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是X^2的ω覆盖. 因此X^2有性质 C".

对于每一$n\in\mathbb{N}$, 由上述所证知, 积空间X^{2^n}具有性质C", 而X^n可闭嵌入X^{2^n}且性质 C"是闭遗传性质, 所以 X^n 有性质 C". ∎

由引理 6.2.9 和定理 6.2.5, $C_p(\mathbb{I})$没有可数强扇 tightness, 但是 $C_p(\mathbb{I})$有可数扇 tightness.

例 6.2.12 Fortissimo 空间(Steen, Seebach[1978]): 广义可数的非σ紧空间.

对于不可数集合 X, 取定 p 为 X 的一个特殊点. 在 X 上赋予 Fortissimo 拓扑(Fortissimo topology): 对于 X 的子集 F, F 是 X 的闭集当且仅当或者 $p\in F$, 或者 F 是可数集. 具有 Fortissimo 拓扑的集合 X 称为 Fortissimo 空间(Fortissimo space), 记为 X(p). 显然, X(p)是正则的 Lindelöf 空间.

由定义易验证, X(p)是广义可数空间. 设 K 是 X(p)的紧子集且 $p\in K$. 若 K 是无限集, 取$K\setminus\{p\}$的无限子集$\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$, 那么 K 的开覆盖$\{X(p)\setminus\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\}\bigcup\{\{x_n\} : n\in\mathbb{N}\}$不含有有限子覆盖, 矛盾. 从而 X(p)的紧子集是有限集, 故 X(p)不是σ紧空间.

由例 5.5.7 的说明, $C_p(X(p))$是 Fréchet 空间. ∎

练习

6.2.1 Hurewicz 空间性质或性质 C"具有: (1) 闭遗传性质; (2) 可数闭和定理成立; (3) 连续函数保持.

6.2.2 设 X 是 Lindelöf 的 P 空间, 证明: $C_p(X)$有可数 tightness.

6.2.3 每一(T_1)P 空间的可数子集是闭离散子集.

6.2.4 设 X 是紧空间且函数空间 $C_p(X^\omega)$同胚于 $C_p(Y^\omega)$, 则 Y 是紧空间.

§6.3 Baire 空间

本节介绍 C_p 理论中的 Baire 空间性质和函数空间 $C_p(X)$含有积空间$\mathbb{R}^X$的 G_δ 集和 F_σ 集性质. 这是§5.6 中讨论 $C_\alpha(X)$完全性的继续. 先证明著名的 Pytkeev 定理.

引理 6.3.1 设 J 是$\mathbb{R}$的闭区间, $f\in C(X, J)$, A, F 分别是 X 的闭集和有限集, $\varepsilon>0$, $h\in J^F$ 使得对于每一 $x\in F\bigcap A$ 有$|h(x)-f(x)|<\varepsilon$. 则存在 $g\in C(X, J)$使得 $g_{|F}=h$ 且对于每一 $x\in A$ 有$|g(x)-f(x)|<\varepsilon$.

证明 选取空间 X 的互不相交的开集族$\{U_x\}_{x\in F}$使得对于每一$x\in F$有 $x\in U_x$ 且当 $x\in F\setminus A$ 时有 $U_x\subset X\setminus A$. 对于每一 $x\in F$, 让 J_x 是以 0 和 h(x)-f(x)为端点的闭区间, 并且取$\phi_x\in C(X, J_x)$使得$\phi_x(x)=h(x)-f(x)$且$\phi_x(X\setminus U_x)=\{0\}$. 令$\theta=f+\sum_{x\in F}\phi_x$, 则$\theta\in C(X)$. 下面通过$\theta$的截断函数来构造所需的函数 g. 记 J=[a, b], 对于每一 $x\in X$, 若$\theta(x)>b$, 定义 g(x)=b; 若$\theta(x)\in[a, b]$, 定义 $g(x)=\theta(x)$; 若$\theta(x)<a$, 定义 g(x)=a. 则 g 是所要寻找的函数. ∎

定理 6.3.2 (Pytkeev 定理[1985])$C_p(X)$是 Baire 空间当且仅当 X 的每一有限子集的互不相交序列有强离散的子序列.

证明 必要性来自定理 5.6.13, 下面证明充分性.

设$\mathscr{U}$是积空间$\mathbb{R}^X$的所有形如 W(f, F, ε)的基本开集的族, 其中 W(f, F, ε)=$\{g\in\mathbb{R}^X$:

对于每一 $x\in F$ 有$|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ }, $f\in\mathbb{R}^X$, F是X的非空有限子集且$\varepsilon>0$. 注意到, 若 $g\in\mathbb{R}^X$ 使得 $g_{|F}=f_{|F}$, 则 $g\in W(f, F, \varepsilon)$. 对于每一 $U=W(f, F, \varepsilon)\in\mathscr{U}$, 定义 $S(U)=F$, $m(U)=\sup\{|g(x)|: g\in U 且 x\in F\}$. 这时 $0\le m(U)<+\infty$. 设$\{F_n\}$是空间$C_p(X)$的无处稠密集的序列. 因为$C_p(X)$是$\mathbb{R}^X$的稠密子集, 所以每一 F_n 是$\mathbb{R}^X$的无处稠密集. 不妨设每一 $F_n\subset F_{n+1}$.

用归纳方法定义如下 3 个序列: X 的有限子集的递增序列$\{S_n\}$, 正数的递减数列$\{m_n\}$和 $\mathscr{U}$ 的有限子集的集列$\{\mathscr{U}_n\}$满足: 对于每一 $n\in\mathbb{N}$有

(2.1) 对于每一 $U\in\mathscr{U}_n$, 存在 $U'\in\mathscr{U}_{n+1}$ 使得 $U'\subset U$;

(2.2) $U\bigcap F_n=\varnothing$, $\forall U\in\mathscr{U}_n$;

(2.3) $S(U)\subset S_n$, $\forall U\in\mathscr{U}_n$;

(2.4) $m(U)\le m_n$, $\forall U\in\mathscr{U}_n$;

(2.5) 对于每一 $f\in[-m_n, m_n]^X$, 存在 $U\in\mathscr{U}_{n+1}$使得 $U\subset W(f, S_n, 1/n)$.

因为 F_1是X的无处稠密集, 取$U\in\mathscr{U}$使得$U\bigcap F_1=\varnothing$ (练习 1.7.4), 让 $S_1=S(U)$, $m_1=m(U)$且 $\mathscr{U}_1=\{U\}$. 假设已构造了 S_n, m_n和 $\mathscr{U}_n$ 具有性质(2.1)~(2.5). 让 $Z=[-m_n, m_n]^X$, 则 Z 是紧子空间, 存在 Z 的有限子集$\{f_i\}_{i\le k}$使得 $Z\subset\bigcup_{i\le k}W(f_i, S_n, 1/2n)$. 令 $\mathscr{H}=\mathscr{U}_n\bigcup\{\bigcup_{i\le k}W(f_i, S_n, 1/2n)\}$. 对于每一$H\in\mathscr{H}$, 存在 $U_H\in\mathscr{U}$ 使得 $U_H\subset H\setminus F_{n+1}$(利用 F_{n+1}的无处稠密性). 定义 $S_{n+1}=S_n\bigcup(\bigcup_{H\in\mathscr{H}}S(U_H))$, $m_{n+1}=m_n+\sum_{H\in\mathscr{H}}m(U_H)$, $\mathscr{U}_{n+1}=\{U_H: H\in\mathscr{H}\}$. 显然, 它们具有性质(2.1)~(2.4). 设 $f\in[-m_n, m_n]^X$, 存在 $i\le k$ 使得 $f\in H=W(f_i, S_n, 1/2n)$. 则 $U_H\in\mathscr{U}_{n+1}$, 让 $g\in U_H$且 $x\in S_n$, 那么$|f(x)-g(x)|\le|f(x)-f_i(x)|+|f_i(x)-g(x)|<1/2n+1/2n=1/n$, 于是 $U_H\subset W(f, S_n, 1/n)$.

由充分性的假设, X 的有限子集的互不相交的序列$\{S_{n+1}\setminus S_n\}$有强离散的子序列$\{S_{n_k+1}\setminus S_{n_k}\}$, 其中不妨设每一 $n_{k+1}\ge\max\{n_k+2, 2k+1\}$. 依下述方式重排所得到的序列的项: 对于每一 $k\in\mathbb{N}$, 置 $T_{2k-1}=S_{n_k}$, $T_{2k}=S_{n_k+1}$, $M_{2k-1}=m_{n_k}$, $M_{2k}=m_{n_k+1}$, $\mathscr{V}_{2k-1}=\mathscr{U}_{n_k}$, $\mathscr{V}_{2k}=\mathscr{U}_{n_k+1}$.

则新序列满足下述条件：对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 有

(2.6) $V\bigcap F_n=\varnothing$，$\forall V\in\mathcal{V}_n$；

(2.7) $S(V)\subset T_n$，$\forall V\in\mathcal{V}_n$；

(2.8) $f(S(V))\subset[-M_n, M_n]$，$\forall f\in V\in\mathcal{V}_n$；

(2.9) 对于每一 $f\in[-M_n, M_n]^X$，存在 $V\in\mathcal{V}_{n+1}$ 使得 $V\subset W(f, T_n, 1/n)$.

事实上，不妨设 $n=2k$. 让 $V\in\mathcal{V}_n$，则 $V\in\mathcal{V}_{2k}=\mathcal{U}_{n_k+1}$. 由于 $n_k\ge 2k-1$，所以 $n\le n_k+1$，于是 $F_n\subset F_{n_k+1}$，从而 $V\bigcap F_n=\varnothing$；同时，$S(V)\subset S_{n_k+1}=T_{2k}=T_n$；对于每一 $f\in V$，$f(S(V))\subset[-m_{n_k+1}, m_{n_k+1}]=[-M_{2k}, M_{2k}]=[-M_n, M_n]$. 再设 $f\in[-M_n, M_n]^X$，由(2.5)，存在 $U\in\mathcal{U}_{n_k+2}=\mathcal{V}_{n+1}$ 使得 $U\subset W(f, S_{n_k+1}, 1/(n_k+1))$. 因为 $n_{k+1}\ge n_k+2$，所以 $T_n=S_{2k}\subset S_{n_k+1}$，又因为 $1/(n_k+1)\le 1/2k=1/n$，于是 $U\subset W(f, T_n, 1/n)$.

设 $\{W_{2k}\}$ 是 X 的离散开集族使得对于每一 $k\in\mathbb{N}$ 有

(2.10) $T_{2k}\setminus T_{2k-1}\subset W_{2k}$；

(2.11) $T_{2k-1}\bigcap W_{2k}=\varnothing$.

定义

(2.12) $D_{2k}=X\setminus\bigcup_{i>k}W_{2i}$.

则 $\{D_{2k}\}$ 是 X 的覆盖且每一 $T_{2k}\subset D_{2k}$. 下面再由归纳方法定义 4 个附加的序列：正偶数的递增序列 $\{j_n\}$，$\mathcal{U}$ 的序列 $\{V_n\}$，$C_p(X)$ 的序列 $\{f_n\}$ 和正数的序列 $\{\varepsilon_n\}$ 满足：对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 有

(2.13) $\varepsilon_{n+1}\le\varepsilon_n/2$;

(2.14) $W(f_n, T_{j_n}, 3\varepsilon_n)\subset V_n\in\mathcal{V}_{j_n}$；

(2.15) $f_n\in[-M_{j_n}, M_{j_n}]^X$；

(2.16) $|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\varepsilon_n$，$\forall x\in D_{j_n}$.

先让 $j_1=2$, $V_1\in\mathcal{V}_2$, $f\in V_1$. 由(2.8), $f(S(V_1))\subset[-M_2, M_2]$. 再由引理 6.3.1(或引理 4.5.5),

存在 $f_1\in C_p(X, [-M_2, M_2])$使得对于每一 $x\in S(V_1)$有 $f_1(x)=f(x)$. 那么 $f_1\in V_1$. 由(2.6), $S(V_1)\subset T_2$, 所以存在$\varepsilon_1>0$ 使得$W(f_1, T_2, 3\varepsilon_1)\subset V_1$. 假设已构造了 j_n, V_n, f_n和ε_n具有性质(2.13)~(2.16). 取定偶数 $j_{n+1}>\max\{j_n, 1+1/\varepsilon_n\}$. 由(2.15), (2.9), (2.1)及 $j_{n+1}-j_n\ge 2$, 存在 $V_{n+1}\in\mathscr{V}_{j_{n+1}}$ 使得 $V_{n+1}\subset W(f_n, T_{j_{n+1}-1}, 1/(j_{n+1}-1))$. 取定 $f\in V_{n+1}$. 由(2.10)和(2.12), $T_{j_{n+1}}\setminus T_{j_{n+1}-1}\subset W_{j_{n+1}}\subset X\setminus D_{j_{n+1}-2}\subset X\setminus D_{j_n}$, 再由(2.7), $S(V_{n+1})\subset T_{j_{n+1}}$, 所以 $S(V_{n+1})\cap D_{j_n}\subset T_{j_{n+1}}\cap D_{j_n}\subset T_{j_{n+1}-1}$, 又由(2.8)和(2.15), $f(S(V_{n+1}))\subset[-M_{j_{n+1}}, M_{j_{n+1}}]$且 $f_n\in[-M_{j_n}, M_{j_n}]^X$, 因而在引理 6.3.1 中若取 $A=D_{j_n}$, $F=S(V_{n+1})$, $\varepsilon=1/(j_{n+1}-1)$, $h=f_{|F}$, 那么存在 $f_{n+1}\in C_p(X, [-M_{j_{n+1}}, M_{j_{n+1}}])$使得对于每一 $x\in S(V_{n+1})$有 $f_{n+1}(x)=f(x)$, 且对于每一 $x\in D_{j_n}$ 有$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<1/(j_{n+1}-1)<\varepsilon_n$. 从而 $f_{n+1}\in V_{n+1}$, 于是存在 $0<\varepsilon_{n+1}\le\varepsilon_n/2$ 使得 $W(f_{n+1}, T_{j_{n+1}}, 3\varepsilon_{n+1})\subset V_{n+1}$. 因此, 条件(2.13)~(2.16)成立.

条件(2.16)可修改为

(2.17) 当 $m, n\ge k$ 且 $x\in D_{j_k}$ 时有$|f_m(x)-f_n(x)|<2\varepsilon_k$.

事实上, 不妨设 $m>n$, 由(2.16)和(2.13)有 $|f_m(x)-f_n(x)|\le|f_m(x)-f_{m-1}(x)|+\dots+|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\varepsilon_{m-1}+\dots+\varepsilon_{n+1}+\varepsilon_n\le\varepsilon_n/(2^{m-n-1})+\dots+\varepsilon_n/2+\varepsilon_n<2\varepsilon_n\le 2\varepsilon_k$.

特别地, (2.17)表明对于每一 $k\in\mathbb{N}$, 在 D_{j_k} 上$\{f_n\}$是一致收敛的序列. 因而在 X 上$\{f_n\}$点态收敛于某一$f\in\mathbb{R}^X$且 f 在D_{j_k}上的限制是连续的. 由于$\{W_{2k}\}$的离散性, 所以$f\in C_p(X)$.

最后, 证明对于每一 $n\in\mathbb{N}$有 $f\in V_n$. 让 $x\in T_{j_n}$, 由(2.7), (2.11)及(2.12), $x\in T_{j_n}\subset D_{j_n}$. 如果 $m>n$, 由(2.17), $|f_m(x)-f_n(x)|<2\varepsilon_n$. 这表明$|f(x)-f_n(x)|\le 2\varepsilon_n<3\varepsilon_n$. 由(2.14), $f\in W(f_n, T_{j_n}, 3\varepsilon_n)\subset V_n$. 再由(2.6), $f\notin F_{j_n}$. 从而, $f\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_{j_n}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$. 故 $C_p(X)$是第二范畴的, 由定理 1.7.7, 所以 $C_p(X)$是 Baire 空间. ▮

由推论 2.5.13, $\mathbb{R}^X$是 Baire 空间. 这一结果也可从定理 6.3.2 导出. 设集合 X 赋予离散拓扑, 则空间 X 的每一有限子集的互不相交序列有强离散的子序列, 由定理 6.3.2, $C_p(X)=\mathbb{R}^X$

是 Baire 空间.

推论 6.3.3 设 $C_p(X)$是 Baire 空间. 若 Y 是 X 的子空间, 则 $C_p(Y)$是 Baire 空间.

证明 由于定理 6.3.2 中的充分性条件是遗传性质, 所以若 Y 是 X 的子空间, 则 $C_p(Y)$是 Baire 空间. ∎

问题 6.3.4 (Lutzer, McCoy[1980])如果对于空间 X 的每一可数子空间 Y, $C_p(Y)$是 Baire 空间, $C_p(X)$是否是 Baire 空间?

推论 6.3.5 若$\{C_p(X_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$是 Baire 空间族, 则$\prod_{\lambda\in\Lambda} C_p(X_\lambda)$是 Baire 空间.

证明 因为每一 $C_p(X_\lambda)$是 Baire 空间, 所以每一 X_λ 满足定理 6.3.2 的充分性条件, 于是$\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 也满足定理 6.3.2 的充分性条件, 故 $C_p(\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)$是 Baire 空间. 由推论 4.5.17, 积空间$\prod_{\lambda\in\Lambda} C_p(X_\lambda)$同胚于函数空间 $C_p(\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)$, 因此$\prod_{\lambda\in\Lambda} C_p(X_\lambda)$是 Baire 空间. ∎

下面利用完全性介绍函数空间 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$的 G_δ 集的特征. $C_p(X)$总是$\mathbb{R}^X$的稠密子集, 研究表明当 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$(稠密)的 G_δ 集时空间 X 具有特殊的性质.

定理 6.3.6 (Dijkstra, Grilliot, van Mill, Lutzer[1985])空间 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$稠密的 G_δ 集当且仅当 X 是离散空间, 从而 $C_p(X)=\mathbb{R}^X$.

证明 若 X 是离散空间, 则 $C_p(X)=\mathbb{R}^X$是$\mathbb{R}^X$稠密的 G_δ 集. 若 X 不是离散空间, 存在函数 $f\in\mathbb{R}^X\setminus C_p(X)$. 定义函数$\theta_f: \mathbb{R}^X\to\mathbb{R}^X$使得对于每一 $g\in\mathbb{R}^X$有$\theta_f(g)=f+g$. 则θ_f是同胚且$\theta_f(C_p(X))\subset\mathbb{R}^X\setminus C_p(X)$. 因为$\mathbb{R}^X$是Baire空间, 若 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$的稠密的 G_δ 集, 则$\mathbb{R}^X\setminus C_p(X)$也含有$\mathbb{R}^X$的稠密的 G_δ 集, 于是$\mathbb{R}^X$中存在可数个开稠密子集之交集是空集, 这与$\mathbb{R}^X$是 Baire 空间相矛盾. 故 $C_p(X)$不可能含有$\mathbb{R}^X$的稠密的 G_δ 集. ∎

推论 6.3.7 若空间 $C_p(X)$含有稠密的 Čech 完全子空间, 则 X 是可数的离散空间.

证明 设 Z 是空间 $C_p(X)$稠密的 Čech 完全子空间, 则 Z 是$\mathbb{R}^X$稠密的 Čech 完全子空间. 对于$\mathbb{R}^X$的任一 T_2 紧化 Y, 则 Y 也是 Z 的 T_2 紧化, 于是 Z 是 Y 的 G_δ 集, 从而 Z 是$\mathbb{R}^X$的 G_δ 集. 由于定理 6.3.6, X 是离散空间, 故 $C_p(X)=\mathbb{R}^X$.

由于 $C_p(X)$是齐性空间，不妨设 X 上的零函数 $f_0\in Z$. 又由于 Z 是 q 空间，于是存在 $C_p(X)$中 f_0的基本开邻域列$\{W(f_0, A_n, \varepsilon_n)\}$使得$\{W(f_0, A_n, \varepsilon_n)\cap Z\}$是 f_0在 Z 中的 q 序列. 若存在 $x\in X\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$，那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 因为 Z 是 $C_p(X)$的稠密子集，存在 $g_n\in[x, (n, +\infty)]\cap W(f_0, A_n, \varepsilon_n)\cap Z$, 则序列$\{g_n\}$在 Z 中没有聚点，矛盾. 因此, $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$. 故 X 是可数空间. ∎

定理 6.3.8 (Lutzer, McCoy[1980])空间 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$的非空的 G_δ集当且仅当 X 是可数空间与离散空间的拓扑和.

证明 设 $f\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}W_n\subset C_p(X)$, 其中每一 $W_n=\{g\in\mathbb{R}^X$ ：对于每一 $x\in X_n$ 有 $|g(x)-f(x)|<\varepsilon_n\}$，$\varepsilon_n>0$, X_n 是 X 的非空有限子集. 令 $Y=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X_n$，$Z=X\setminus Y$. 则 Y 是可数空间，下面证明 Z 是 X 的既开且闭的离散子空间. 注意到，如果对于 $g\in\mathbb{R}^X$有 $g_{|Y}=f_{|Y}$, 则 $g\in C_p(X)$.

首先, Y 含有 X 中的所有聚点. 若存在 X 的聚点 $x\in Z$, 定义 $g:X\to\mathbb{R}$使得当 $y\in X\setminus\{x\}$时有 $g(y)=f(y)$且 $g(x)=f(x)+1$. 由于 $g_{|Y}=f_{|Y}$，所以 g 是连续的. 又由于 $X\setminus\{x\}$是 Hausdorff 空间 X 的稠密子集，于是 f=g, 矛盾. 因而 Z 是 X 的开离散子空间.

其次, Z 是 X 的闭集. 设 Z 在 X 中有聚点 $x\in Y$. 定义 $g: X\to\mathbb{R}$使得当 $y\in Y$ 时 $g(y)=f(y)$, 当 $y\in Z$ 时 $g(y)=f(x)+1$. 由于 $g_{|Y}=f_{|Y}$，所以 g 是连续的. 又由于 x 是 Z 的聚点且 g 在 Z 上取常值，于是 $g(x)=f(x)+1$, 矛盾. 所以 Z 是 X 的闭子集. 从而 Z 是 X 的既开且闭的离散子空间.

总之, X 是可数空间 Y 与离散空间 Z 的拓扑和.

反之，设 X 是 Y 和 Z 的拓扑和，其中 Y 是可数的且 Z 是离散的. 则 $C_p(X)$同胚于 $C_p(Y)\times\mathbb{R}^Z\subset\mathbb{R}^X$. 设 $f\in C_p(Y)$, 因为$\mathbb{R}^Y$是可度量化的，f 是$\mathbb{R}^Y$中的 G_δ集. 因而$\{f\}\times\mathbb{R}^Z$是$\mathbb{R}^X$中的非空的 G_δ集且含于 $C_p(Y)\times\mathbb{R}^Z$中. ∎

下面讨论 $C_p(X)$含有$\mathbb{R}^X$的 F_σ子集时底空间 X 的性质.

定理 6.3.9 (Dijkstra, Grilliot, van Mill, Lutzer[1985])如果 $C_p(X)$是$\mathbb{R}^X$的 F_σ子集，则 X

是离散空间.

证明　若X不是离散空间，设x_0是X的非孤立点，且$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n=C_p(X)$，其中每一 F_n 是$\mathbb{R}^X$的闭子集，$F_0=\varnothing$. 用归纳法构造$\mathbb{I}^X$的序列$\{f_n\}$及x_0的开邻域列$\{U_n\}$使得对于每一$n\in\mathbb{N}$有

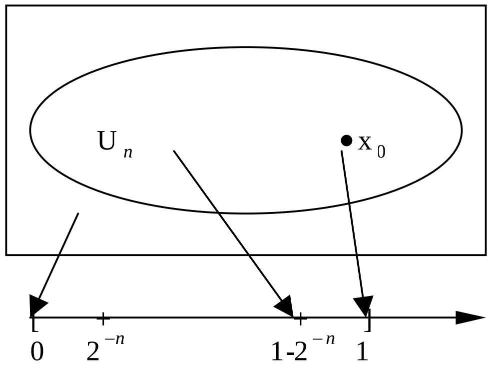

图　归纳法构造f_n及U_n

(9.1) $f_n\le f_{n+1}$;

(9.2) $U_n\supset\overline{U}_{n+1}\supset U_{n+1}$;

(9.3) $f_n(x_0)=1$;

(9.4) $f_{n}|_{U_n\setminus\{x_0\}}\equiv 1\text{-}2^{-n}$;

(9.5) $f_{n}|_{X\setminus\{x_0\}}$是连续的;

(9.6) $f_{n+1}|_{X\setminus U_n}=f_{n}|_{X\setminus U_n}$;

(9.7) 若$f\in\mathbb{R}^X$满足$f|_{(X\setminus U_n)\cup\{x_0\}}=f_n|_{(X\setminus U_n)\cup\{x_0\}}$，则$f\notin F_n$.

先定义$f_0:X\to\mathbb{I}$使得$f_0(x_0)=1$，$f_0(X\setminus\{x_0\})=\{0\}$，且让$U_0=X$. 假设对于$0\le i\le n$已构造了满足条件的 f_i和U_i. 由完全正则性，存在$g\in C(X, [0, 2^{-n}])$满足$g(x_0)=2^{-n}$且$g(X\setminus U_n)\subset\{0\}$. 定义$f_{n+1}:X\to\mathbb{I}$使得

$$f_{n+1}(x)=\begin{cases}1 & ,x=x_0\\ f_n(x)+\min\{2^{-(n+1)},g(x)\} & ,x\ne x_0\end{cases}.$$

由于集合 $V=g^{-1}((2^{-(n+1)}, 2^{-(n-1)}))$是 x_0的邻域且$\overline{V}\subset U_n$，所以$f_{n+1}|_{V\setminus\{x_0\}}\equiv 1\text{-}2^{-n}+2^{-(n+1)}=1\text{-}2^{-(n+1)}$. 因为$x_0$是X的非孤立点，于是$f_{n+1}$在$x_0$不连续，从而$f_{n+1}\notin F_{n+1}$. 又因为 F_{n+1}是$\mathbb{R}^X$的闭集，存在 X 的有限子集 A 和$\varepsilon>0$ 使得 $W(f_{n+1}, A, \varepsilon)\bigcap F_{n+1}=\varnothing$，如果$f\in\mathbb{R}^X$且$f|_A=f_{n+1}|_A$，那么$f\notin F_{n+1}$. 因此，$U_{n+1}=(V\setminus A)\bigcup\{x_0\}$是所求的$x_0$的邻域. 归纳法完成.

由(9.1)，存在$f=\lim_{n\to\infty}f_n$. 由(9.6)和(9.2)，对于每一$n\in\mathbb{N}$有$f|_{(X\setminus U_n)\cup\{x_0\}}=f_n|_{(X\setminus U_n)\cup\{x_0\}}$，

再由(9.7), $f\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$. 然而, f 是连续的. 事实上, 如果 $x\in X\setminus\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$, 由(9.2), 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $x\notin\overline{U}_n$. 由(9.6)和(9.5), f 在 x 连续. 如果 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$, 那么每一 U_n 是 x 的邻域且由(9.3)和(9.4), $f_n(U_n)\subset\{1-2^{-n}, 1\}$. 由(9.1), $f(U_n)\subset[1-2^{-n}, 1]$, 于是 f(x)=1, 因此 f 在 x 连续. 故 $f\in C_p(X)\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$. 矛盾. ■

练习

6.3.1 设 X 是 Michael 空间(例 3.6.14). 证明: $C_p(X)$是 Baire 空间.